JOURNAL OF FUNDAMENTAL MATHEMATICS
AND APPLICATIONS (JFMA) VOL. 2 NO. 1 (Jun 2019)
Available online at www.jfma.math.fsm.undip.ac.id

RADIKAL SUPERNILPOTENT BERTINGKAT

Puguh Wahyu Prasetyo

Pendidikan Matematika, Universitas Ahmad Dahlan
Email : puguh.prasetyo@pmat.uad.ac.id

Abstract. The development of Ring Theory motivates the existence of the development of the Radical Theory of Rings. This condition is motivated since there are rings which have properties other than those owned by the set ring of all integers. These rings are collected so that they fulfill certain properties and they are called radical classes of rings. As the development of science about how to separate the properties of radical classes of rings motivates the existence of supernilpotent radical classes. On the other hand, there exists the concept of graded rings. This concept can be generalized into the Radical Theory of Rings. Thus, the properties of the graded supernilpotent radical classes are very interesting to investigate. In this paper, some graded supernilpotent radical of rings are given and their construction will be described. It follows from this construction that the graded Jacobson radical is a graded supernilpotent radical.
Keywords: radical theory of rings, graded rings, supernilpotent radical, graded supernilpotent radical.

Abstrak. Pengembangan teori ring memotivasi eksistensi pengembangan teori radikal pada ring. Kondisi ini termotivasi karena terdapat beberapa ring yang memiliki sifat-sifat yang tidak dimiliki oleh himpunan ring bilangan bulat. Ring-ring ini dikumpulkan sedemikian sehingga memenuhi beberapa sifat-sifat tertentu dan mereka disebut kelas-kelas radikal dari ring. Pengembangan ilmu tentang bagaimana cara memisahkan sifat-sifat untuk kelas-kelas radikal dari ring memotivasi munculnya kelas-kelas radikal supernilpotent. Di sisi lain,terdapat konsep ring bertingkat. Konsep ini dapat diperumum menjadi teori radikal pada ring. Sehingga, sifat-sifat dari kelas-kelas radikal supernilpotent bertingkat menarik untuk diteliti. Pada artikel ini, diberikan beberapa radikal superniltpotent bertingkat dari ring dan dibahas konstruksinya. Berdasarkan konstruksinya, didapatkan bahwa radikal bertingkat Jacobson merupakan radikal supernilpotent bertingkat.
Keywords: toeri radikal pada ring, ting bertingkat, radikal supernilpotent, radikal supernilpotent bertingkat.

I. PENDAHULUAN

Untuk sebarang ring A, himpunan I ideal A dinotasikan dengan $I \lhd A$. Diketahui A ring dan $I \lhd A$. I ideal semiprima A jika untuk setiap $x \in A$ dengan sifat $xAx \subseteq I$, maka $x \in I$.

Contoh 1 Ideal-ideal $\{(0,0)\}$, $3\mathbb{Z} \oplus 3\mathbb{Z}$ merupakan ideal-ideal semiprima ring $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Berikut penjelasannya.
Untuk $\{(0,0)\}$ sebagai ideal semiprima dari ring $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.
Diambil sebarang $(x,y) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ dengan sifat $(x,y)(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})(x,y) = (0,0)$. Perhatikan bahwa $(x,y)(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})(x,y) = (0,0)$ artinya $(x,y)(a,b)(x,y) = (0,0)$ untuk setiap $(a,b) \in$

$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Lebih lanjut $(x,y)(a,b)(x,y) = (xax, yby) = (0,0) \Rightarrow xax = yby = 0$. Perhatikan $xax = 0$ untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$, hal ini dapat terjadi hanya ketika $x = 0$. Dengan cara yang sama, perhatikan $yby = 0$ untuk setiap $b \in \mathbb{Z}$, hal ini dapat terjadi hanya ketika $y = 0$.

Untuk $3\mathbb{Z} \oplus 3\mathbb{Z}$ merupakan ideal-ideal semiprima $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$

Diambil sebarang $(x,y) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ dengan sifat $(x,y)(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})\,(x,y) \subseteq 3\mathbb{Z} \oplus 3\mathbb{Z}$. Perhatikan bahwa $(x,y)(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})\,(x,y) = 3\mathbb{Z} \oplus 3\mathbb{Z}$ artinya $(x,y)(a,b)(x,y) \in 3\mathbb{Z} \oplus 3\mathbb{Z}$ untuk setiap $(a,b) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Lebih lanjut $(x,y)(a,b)(x,y) = (xax, yby) \in 3\mathbb{Z} \oplus 3\mathbb{Z} \Rightarrow xax, yby \in 3\mathbb{Z}$. Perhatikan $xax \in 3\mathbb{Z}$ untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$, hal ini dapat terjadi hanya ketika $x \in 3\mathbb{Z}$. Dengan cara yang sama, perhatikan $yby \in 3\mathbb{Z}$ untuk setiap $b \in \mathbb{Z}$, hal ini dapat terjadi hanya ketika $y \in 3\mathbb{Z}$.

Diketahui A ring dan $I \lhd A$. Ideal I dari ring A disebut ideal prima (dinotasikan dengan $I \lhd' A$) jika untuk setiap $x, y \in A$ dengan sifat $xAy \subseteq I$, maka $x \in I$ atau y $\in I$.

Contoh 2 Ideal-ideal $\{0\}$, $3\mathbb{Z}$ merupakan ideal ideal prima dari ring bilangan bulat $\mathbb{Z}$.

Untuk {0} ideal prima $\mathbb{Z}$

Diambil sebarang $x, y \in \mathbb{Z}$ dengan sifat $x\mathbb{Z}y = \{0\}$. Perhatikan $x\mathbb{Z}y = \{0\}$, artinya $xay = 0$ untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$, , hal ini dapat terjadi hanya ketika $x = 0$ atau $y = 0$.

Untuk $3\mathbb{Z}$ ideal prima $\mathbb{Z}$

Diambil sebarang $x, y \in \mathbb{Z}$ dengan sifat $x\mathbb{Z}y \subseteq 3\mathbb{Z}$. Perhatikan $x\mathbb{Z}y \subseteq 3\mathbb{Z}$, artinya $xay \in 3\mathbb{Z}$ untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$, hal ini dapat terjadi hanya ketika $x \in 3\mathbb{Z}$ atau $y \in 3\mathbb{Z}$.

Pada pembahasan sebelumnya telah ditunjukkan bahwa $3\mathbb{Z} \oplus 3\mathbb{Z}$ merupakan ideal semiprima ring $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, contoh tersebut merupakan contoh ideal semiprima $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ yang bukan prima. Karena terdapat $(3,1), (1,3) \notin 3\mathbb{Z} \oplus 3\mathbb{Z}$ sehingga $(3,1)(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})(1,3) \subseteq 3\mathbb{Z} \oplus 3\mathbb{Z}$. Diketahui A ring dan $I \lhd A$. Suatu ideal I dari A disebut esensial jika untuk setiap $0 \neq J \lhd A$, maka berlaku $I \cap J \neq \{0\}$.

Contoh 3 $2\mathbb{Z}$ ideal esensial $\mathbb{Z}$. Diambil sebarang $n\mathbb{Z}$ ideal taknol $\mathbb{Z}$, dengan n anggota bilangan asli. Perhatikan bahwa $0 \neq 2n \in 2\mathbb{Z}$, di lain pihak $2n = n.2 \in n\mathbb{Z}$. Dengan demikian $2\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z} \neq \{0\}$. Jadi $2\mathbb{Z}$ ideal esensial $\mathbb{Z}$.

Definisi 1 [1] *Ring A disebut ring semiprima jika* $\{0_A\}$ *ideal semiprima A. Ring A disebut ring prima jika* $\{0_A\}$ *ideal prima A.*

Contoh 5 Pada pembahasan sebelumnya telah ditunjukkan bahwa $\{(0,0)\}$ merupakan ideal semiprima ring $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, akibatnya $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ merupakan ring semiprima.

Contoh 6 Pada pembahasan sebelumnya telah ditunjukkan bahwa $\{0\}$ merupakan ideal semiprima ring $\mathbb{Z}$, akibatnya $\mathbb{Z}$ merupakan ring prima.

Ring $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ merupakan ring semiprima yang bukan ring prima, karena terdapat $(0,0) \neq (1,0), (0,1)$dengan sifat $(1,0)(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})(0,1) = \{(0,0)\}$.

Syarat perlu dan cukup suatu ring merupakan ring semiprima dijelaskan dalam teorema berikut ini.

Teorema 1 [1] *Diketahui R ring. Ring R merupakan ring semiprima jika dan hanya jika irisan semua ideal prima R sama dengan nol.*

Berdasarkan Teorema 1 diperoleh akibat sebagai berikut

Akibat 1 [1] *Diketahui R ring. Jika R subdirect product dari koleksi ring $\{R_j | j \in J\}$ dengan R_j ring prima untuk setiap $j \in J$, maka R semiprima.*

Bukti: Perhatikan bahwa R *subdirect product* dari koleksi ring $\{R_j | j \in J\}$ dengan R_j ring prima untuk setiap $j \in J$. Hal ini berarti terdapat koleksi $\{I_j \lhd R | j \in J\}$ sehingga $\bigcap_{j \in J} I_j = 0$ dan $R/_{I_j} \cong R_j$. Karena R_j ring prima untuk setiap $j \in J$, maka I_j ideal prima R untuk setiap $j \in J$. Perhatikan bahwa I_j ideal prima R untuk setiap $j \in J$ dengan sifat $\bigcap_{j \in J} I_j = 0$, akibatnya R semiprima.

Eksistensi kelas radikal ring termotivasi dari eksistensi kelas semua ring nil, yaitu kelas ring-ring A dengan sifat setiap elemen dari ring A merupakan elemen nilpotent yang memiliki sifat tertutup terhadap homomorfisma, jumlahan dari ideal-ideal yang terdiri dari elemen-elemen nilpoten juga merupakan ideal nil, dan untuk setiap ring A dengan sifat $I, A/I$ merupakan ring nil, maka A sendiri merupakan ring nil. Definisi kelas radikal dapat dilihat dalam [1] dan [2]. Lebih lanjut, berikut ini merupakan syarat perlu dan syarat cukup agar suatu kelas ring merupakan kelas radikal.

Teorema 2 [1] *Untuk sebarang kelas ring γ, pernyataan-pernyataan berikut ini ekuivalen.*

1. *Kelas ring γ merupakan kelas radikal*
2. *Kelas ring γ mempunyai sifat induktif, dan tertutup terhadap perluasan serta memenuhi pernyataan berikut:*
   Jika $A \in \gamma$ maka untuk setiap $0 \neq B$ peta homomorfis dari A, terdapat C yang merupakan ideal B dengan sifat $0 \neq C \in \gamma$.

Berdasarkan sifat konstruksinya kelas radikal dibagi menjadi dua macam yaitu kelas radikal atas dan kelas radikal bawah. Kontruksi ini dapat dipelajari lebih lanjut dalam [1] dan [2].

Radikal dan konstruksinya dijelaskan dalam [1] dan [2]. Kelas semua ring *nilpotent* dinotasikan dengan $\mathcal{N}_0$ dan didefinisikan oleh $\mathcal{N}_0 = \{A | A$ merupakan ring dengan sifat $A^n = 0$ untuk suatu bilangan bulat positif $n \geq 1$ tertentu$\}$. Faktanya, kelas semua ring *nilpotent* $\mathcal{N}_0$ bukan merupakan kelas radikal. Berdasarkan kondisi ini, maka memotivasi adanya konstruksi radikal bawah $\mathcal{L}\mathcal{N}_0$ dari $\mathcal{N}_0$ yang merupakan kelas radikal terkecil yang memuat $\mathcal{N}_0$. Konstruksi kelas radikal bawah $\mathcal{L}\mathcal{N}_0$ ini dapat dipelajari lebih lanjut dalam [1]. Kelas radikal bawah $\mathcal{L}\mathcal{N}_0$ ini selanjutnya dinotasikan dengan β.

Di lain pihak, suatu kelas radikal γ disebut radikal khusus jika $\gamma = \mathcal{U}(\mu)$ merupakan kelas radikal atas dari kelas khusus μ yaitu kelas ring-ring yang terdiri dari ring-ring prima, bersifat *hereditary* dan tertutup terhadap perluasan esensial. Kontruksi kelas radikal atas juga dapat dipelajari lebih lanjut dari [1]. Selanjutnya, kelas semua ring-ring prima yang dinotasikan dengan π merupakan salah satu contoh kelas khusus. Dengan demikian kelas radikal atas $\mathcal{U}(\pi)$ merupakan kelas radikal khusus.

Teorema 3 [3] *Kelas radikal $\beta = \mathcal{U}(\pi)$ dengan π merupakan kelas semua ring prima.*

Bukti: Dapat dilihat dalam [3].

Berdasarkan Teorema 1 di atas kelas radikal β merupakan kelas radikal atas dari kelas semua ring prima π. Oleh sebab itu, kelas radikal β disebut juga dengan kelas radikal prima.

Definisi 2 [1] *Diketahui ring A dan ϱ kelas ring tertentu didefinisikan $(A)_\varrho = \cap \{I \lhd A |$ dengan sifat $A/I \in \varrho\}$. Selanjutnya kelas radikal γ disebut mempunyai sifat irisan relatif terhadap kelas ϱ jika $\gamma(A) = (A)_\varrho$ untuk setiap ring A.*

Teorema 4 [3] *Kelas radikal prima β memiliki sifat irisan relatif terhadap π yaitu untuk sebarang ring A berlaku radikal prima $\beta(A) = (A)_\pi$.*

Bukti: Dapat dilihat dalam [3].

Dengan demikian kelas radikal prima β mempunyai sifat irisan relatif terhadap kelas semua ring prima π. Berdasarkan konsep ini, akan diberikan konsep kelas radikal prima bertingkat. Diketahui ring A dengan G −bertingkat. Radikal prima bertingkat dari A dinotasikan dengan $\beta_G(A)$ dan didefinisikan sebagai irisan dari semua ideal prima bertingkat dari A. Selanjutnya kelas ring-ring G −bertingkat $\beta_G = \{A | A$ merupakan ring G −bertingkat dan $\beta_G(A) = A\}$ merupakan kelas radikal prima bertingkat.

Definisi 3 [4] *Kelas radikal γ_G disebut kelas radikal supernilpotent bertingkat jika γ_G memuat β_G dan γ_G bersifat hereditary bertingkat.*

II. PEMBAHASAN

Di lain pihak kelas ring-ring $\mathcal{J} = \{A | (A,\circ)$ merupakan grup$\}$ dengan operasi biner $\circ$ yang didefinisikan oleh $a \circ b = a + b - ab$ untuk setiap $a, b \in A$. Dapat ditunjukkan bahwa kelas ring ring $\mathcal{J}$ merupakan kelas radikal. Selanjutnya kelas ring-ring G −bertingkat yang dinotasikan dengan $\mathcal{J}^G = \{A | A$ merupakan ring G −bertingkat dan $A^u \in \mathcal{J}\}$ dengan A^u merupakan ring A dengan G −bertingkatnya yang diabaikan. Beberapa sifat terkait kelas $\mathcal{J}^G$ dijelaskan oleh teorema-teorema di bawah ini.

Teorema 5 *Kelas ring-ring G −bertingkat $\mathcal{J}^G$ memuat kelas radikal prima bertingkat β_G.*

Bukti: Akan ditunjukkan bahwa $\mathcal{J}^G$ memuat kelas radikal prima bertingkat β_G. Diambil sebarang $A \in \beta_G$, dengan demikian berdasarkan kontruksi β_G diperoleh A merupakan ring G −bertingkat dengan sifat $\beta_G(A) = A$. Dibentuk A^u yaitu ring A dengan G −bertingkatnya yang diabaikan. Dengan demikian $\beta(A^u) = A^u$. Di lain pihak $\beta \subset \mathcal{J}$, akibatnya $A^u \in \mathcal{J}$. Jadi dapat disimpulkan bahwa $A \in \mathcal{J}^G$. Oleh sebab itu $\mathcal{J}^G$ memuat β_G.

Teorema 6 *Kelas ring-ring G −bertingkat $\mathcal{J}^G$ bersifat hereditary bertingkat.*

Bukti: Diambil sebarang ring $A \in \mathcal{J}^G$ dan $0 \neq I$ merupakan ideal sejati ring A. Akan ditunjukkan bahwa $I \in \mathcal{J}^G$. Perhatikan bahwa $A \in \mathcal{J}^G$, maka $A^u \in \mathcal{J}$. Selanjutnya dibentuk I^u, jelas bahwa I^u merupakan ideal taknol sejati A^u. Berdasarkan sifat *hereditary* yang dimiliki oleh $\mathcal{J}$, maka dapat disimpulkan bahwa $I^u \in \mathcal{J}$. Hal ini berakibat $I \in \mathcal{J}^G$. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa $\mathcal{J}^G$ bersifat *hereditary* bertingkat.

Berdasarkan Teorema 5 dan Teorema 6 diperoleh sifat lanjutan dari kelas ring-ring G −bertingkat $\mathcal{J}^G$ sebagai berikut.

Akibat 7 *Kelas ring-ring G −bertingkat $\mathcal{J}^G$ merupakan kelas radikal supernilpotent bertingkat.*

Bukti: Langkah pertama harus ditunjukkan bahwa kelas ring-ring G −bertingkat $\mathcal{J}^G$ merupakan kelas radikal bertingkat. Perhatikan Proposisi 2 dalam [4], sehingga dapat disimpulkan bahwa $\mathcal{J}^G$ merupakan kelas radikal G −bertingkat. Selanjutnya. Berdasarkan Teorema 5 dan Teorema 6 dapat disimpulkan bahwa $\mathcal{J}^G$ merupakan kelas radikal supernilpotent bertingkat.

III. KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan di atas, dapat disimpulkan bahwa kelas ring-ring yang dibentuk, yaitu Kelas $\mathcal{J}^G$ merupakan kelas radikal Jacobson bertingkat. Faktanya, kelas radikal Jacobson merupakan kelas radikal *supernilpotent* sekaligus kelas radikal khusus. Hal ini dapat memotivasi penelitian lanjutan untuk membahas apakah kelas radikal Jacobson bertingkat merupakan kelas radikal khusus bertingkat.

REFERENSI

[1] B. Gardner and R. Wiegandt, Radical Theory of Rings, New York: Marcel Dekker, Inc, 2004.

[2] P. W. Prasetyo, Necessary And Sufficient Conditions For $U(*_k)$ To Coincide With The Prime Radical β (Disertasi), Yogyakarta: Universitas Gadjah Mada, 2018.

[3] P. W. Prasetyo, S. Wahyuni, I. E. Wijayanti and H. France-Jackson, "Dari Radikal Ring Ke Radikal Modul (From Radical of Rings To Radical of Modules)," in *Prosiding Seminar Nasional Matematika 2014 Universitas Jember*, Jember, 2014.

[4] H. Fang and P. Stewart, "Radical Theory for Graded Rings," *J. Austral. Math. Soc*, vol. 52, pp. 143-153, 1992.